一般化されたChern-Weil準同型について (変換群論とsurgery)

山崎, 啓太

数理解析研究所講究録 1393 巻 2004 年 17-22

一般化されたChern-Weil準同型について

大阪大学大学院 理学研究科　山崎 啓太 (Keita YAMASAKI)
Graduate School of Science, Osaka University

1　はじめに

可換な $\mathfrak{g}$-微分代数 $\mathcal{A}$ が接続 θ をもつとき，$W\mathfrak{g}$ を Weil 代数とすると Chern-Weil 準同型とよばれる $\mathfrak{g}$-微分代数の準同型 $c^{\theta}: W\mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ が構成できる．これが誘導する写像 $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \cong H((W\mathfrak{g})_{\mathrm{basic}}) \to H(\mathcal{A}_{\mathrm{basic}})$ は接続の取り方によらない．これを (代数版の)Chern-Weil の定理とよぶ．Alekseev-Meinrenken は最近のプレプリント [2] において次のことを示した：必ずしも可換とは限らない locally free $\mathfrak{g}$-微分代数 $\mathcal{A}$ に対して，$\mathfrak{g}$-微分空間の準同型 $c, c': W\mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ が $W\mathfrak{g}$ の単位元で一致するならば，これらが誘導する写像 $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \cong H((W\mathfrak{g})_{\mathrm{basic}}) \to H(\mathcal{A}_{\mathrm{basic}})$ は一致する．これから上の主張が非可換な $\mathcal{A}$ に対しても成り立つことが直ちに分かる．ただし [2] におけるこの定理の証明にはギャップがある．橋本義武氏 (大阪市立大学) と筆者はこのギャップを埋めることに成功したので，ここではそれを説明したい．また [2] ではこの結果の応用としていくつかのことを示しているが，ここでは quadratic Lie 代数の場合の Duflo の定理の “conceptually easy” な証明を紹介する．

2　定義など

2.1　$\mathfrak{g}$-微分代数

標数 0 の体 $\mathbb{F}$ 上のベクトル空間 V に対して，スーパーベクトル空間 E_V を

$$E_V := V \oplus V, \quad E_V^{\bar{0}} = E_V^{\bar{1}} := V$$

と定める．$v \in V$ に対応する E_V の even, odd element をそれぞれ $\bar{v} \in E_V^{\bar{0}}$, $v \in E_V^{\bar{1}}$ と表す．E_V 上の微分 d として

$$\mathrm{d}(v) := \bar{v},\ \mathrm{d}(\bar{v}) := 0, \quad v \in V$$

を自然に拡張したものを考えて，E_V は微分スーパーベクトル空間 (以下 ds) と考える．その対称代数 $S(E_V)$ は V 上の Koszul 代数とよばれる．

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{F}$ 上の Lie 代数とするとき，スーパー Lie 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ を

$$\tilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{g}, \quad \tilde{\mathfrak{g}}^{\bar{0}} = \tilde{\mathfrak{g}}^{\bar{1}} := \mathfrak{g}$$

と定義する．ここで $\tilde{\mathfrak{g}}^{\bar{0}} = \mathfrak{g}$ は $\tilde{\mathfrak{g}}^{\bar{1}} = \mathfrak{g}$ に随伴表現によって作用する．$\tilde{\mathfrak{g}} = E_{\mathfrak{g}}$ と考えることにより微分を定め，$\tilde{\mathfrak{g}}$ は微分スーパー Lie 代数 (以下 dl) と考える．

定義 2.1. $\mathfrak{g}$-微分空間 (以下 $\mathfrak{g}$-ds) とは ds (E, d) と dl 準同型 $\tilde{\mathfrak{g}} \to \mathrm{End}(E)$ の組とする．

$\mathfrak{g}$-微分代数 (以下 $\mathfrak{g}$-da) とは微分スーパー代数 $(\mathcal{A}, \mathrm{d})$ と dl 準同型 $\tilde{\mathfrak{g}} \to \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ の組とする．ただし $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ の derivation 全体とする．

E を $\mathfrak{g}$-ds とするとき，$\bar{\xi} \in \tilde{\mathfrak{g}}^{\bar{0}}$, $\xi \in \tilde{\mathfrak{g}}^{\bar{1}}$ に対応する $\mathrm{End}(E)$ の元をそれぞれ L_ξ, ι_ξ とかくことにする．このとき

$$E_{\mathrm{hor}} := \bigcap \ker \iota_\xi, \quad E_{\mathrm{inv}} := \bigcap \ker L_\xi, \quad E_{\mathrm{basic}} := E_{\mathrm{hor}} \cap E_{\mathrm{inv}}$$

と定義する．

2.2 ホモトピー

スーパーベクトル空間 E, F の間の線型写像全体 $L(E, F)$ は

$$L(E,F)^{\bar{0}} := L(E^{\bar{0}}, F^{\bar{0}}) \oplus L(E^{\bar{1}}, F^{\bar{1}}), \quad L(E,F)^{\bar{1}} := L(E^{\bar{0}}, F^{\bar{1}}) \oplus L(E^{\bar{0}}, F^{\bar{1}})$$

により，スーパーベクトル空間となる．

また E, F が ds のとき，$L(E, F)$ は

$$\mathrm{d}(\phi) := \mathrm{d} \circ \phi - (-1)^{|\phi|} \phi \circ \mathrm{d}$$

を微分とする ds である．ds 準同型は $L(E,F)^{\bar{0}}$ の cocycle に対応する．

2 つの ds 準同型 ϕ_0, $\phi_1 : E \to F$ の間の homotopy とは，$h \in L(E,F)^{\bar{1}}$ であり $\mathrm{d}(h) = \phi_0 - \phi_1$ となるものとする．

また ds 準同型 $\phi : E \to F$ に対する homotopy inverse とは，ds 準同型 $\psi : F \to E$ であり $\phi \circ \psi$, $\psi \circ \phi$ がそれぞれ F, E の恒等写像 id_F, id_E と homotopic であるものとする．

もし homotopy inverse が存在すれば，ϕ は cohomology の間の同型を導く．

補題 2.2. (E, d) を ds として，$s \in \mathrm{End}(E)^{\bar{1}}$ が $[\mathrm{d}, s] = \mathrm{id}_E$ をみたすと仮定する．このとき inclusion $i : \mathbb{F} \hookrightarrow S(E)$ と自然な射影 $\pi : S(E) \to E^{\otimes 0} = \mathbb{F}$ は homotopy inverse になる．つまり $S(E)$ の cohomology は自明である．

証明． $h := s \circ ([\mathrm{d}, s] + i \circ \pi)^{-1}$ とすれば $\mathrm{d}(h) = \mathrm{id}_{S(E)} - i \circ \pi$. □

これより Koszul 代数 $S(E_V)$ の cohomology は自明であることがわかる．実際 $s \in \mathrm{End}(E_V)^{\bar{1}}$ は

$$s(v) := 0, \; s(\bar{v}) := v, \quad v \in V$$

と定めればよい．これに対応する h を Koszul 代数の standard homotopy とよぶ．

さらに E, F を $\mathfrak{g}$-ds とすると，$L(E, F)$ も

$$\iota_\xi(\phi) := \iota_\xi \circ \phi - (-1)^{|\phi|} \phi \circ \iota_\xi, \quad L_\xi(\phi) := L_\xi \circ \phi - \phi \circ L_\xi$$

と定めることにより $\mathfrak{g}$-ds になる．$\mathfrak{g}$-ds 準同型は $L(E,F)^{\bar{0}}_{\mathrm{basic}}$ の cocycle である．

また 2 つの $\mathfrak{g}$-ds 準同型 ϕ_0, $\phi_1 : E \to F$ の間の homotopy h が

$$\iota_\xi(h) = 0, \quad L_\xi(h) = 0$$

をみたすとき $\mathfrak{g}$-homotopy という．

このとき h を制限することにより，$\phi_0|_{E_{\mathrm{basic}}}$, $\phi_1|_{E_{\mathrm{basic}}} : E_{\mathrm{basic}} \to F_{\mathrm{basic}}$ の間の homotopy になり，これらが誘導する写像 $H(E_{\mathrm{basic}}) \to H(F_{\mathrm{basic}})$ は一致する．

2.3 接続

$\mathfrak{g}$-da $\mathcal{A}$ 上の接続とは線型写像 $\theta : \mathfrak{g}^* \to \mathcal{A}^{\mathrm{I}}$ であり

$$\iota_\xi(\theta(\mu)) = \mu(\xi),\ L_\xi(\theta(\mu)) = -\theta(\mathrm{ad}^*_\xi \mu),\quad \xi \in \mathfrak{g},\ \mu \in \mathfrak{g}^*$$

をみたすものとする．接続をもつ $\mathfrak{g}$-da を locally free とよぶ．

$\mathbb{F}\mathfrak{c}$ を even generator $\mathfrak{c}$ によって張られる 1 次元空間とする．これには d が自明に作用しているとして，$E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}$ を ds と考える．さらに $E_{\mathfrak{g}^*}$ 上に $\tilde{\mathfrak{g}}$ の表現を

$$L_\xi \bar{\mu} = -\overline{\mathrm{ad}^*_\xi \mu},\ L_\xi \mu = -\mathrm{ad}^*_\xi \mu,\ \iota_\xi \bar{\mu} = -\mathrm{ad}^*_\xi \mu,\ \iota_\xi \mu = \mu(\xi)\mathfrak{c},\quad \xi \in \mathfrak{g},\ \mu \in \mathfrak{g}^*$$

と定める．$\mathfrak{c}$ には自明に作用しているとして，$E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}$ を $\mathfrak{g}$-ds とする．

$\mathfrak{g}$-da $\mathcal{A}$ が接続 θ をもつと仮定すると，

$$\mu \mapsto \theta(\mu),\ \bar{\mu} \mapsto \mathrm{d}\theta(\mu),\quad \mu \in \mathfrak{g}^*$$

であり，$\mathfrak{c} \mapsto \mathcal{A}$ の単位元，と定めることで $\mathfrak{g}$-ds 準同型 $E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c} \to \mathcal{A}$ をえる．

逆にこのような $\mathfrak{g}$-ds 準同型があれば，制限することにより $\mathcal{A}$ の接続をえる．

よって以下では $\mathcal{A}$ の接続とは上のような $\mathfrak{g}$-ds 準同型とする．

3 Chern-Weil 準同型

Weil 代数 $W\mathfrak{g} := S\mathfrak{g}^* \otimes \wedge\mathfrak{g}^*$ に対して $W\mathfrak{g} \cong S(E_{\mathfrak{g}^*})$ が成り立つ．

さらに $\mathfrak{c}$ を even generator とすると

$$W\mathfrak{g} \cong S(E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c})/\langle \mathfrak{c} - 1 \rangle$$

であることがわかる．$E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}$ 上の $\tilde{\mathfrak{g}}$ の表現から導かれる自然な $\mathfrak{g}$-da structure を考えることにより，$W\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$-da になる．

このとき

$$H((W\mathfrak{g})_{\mathrm{basic}}) \cong (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$$

が成り立つ．

$\mathcal{A}$ を可換な locally free $\mathfrak{g}$-da とする．$\mathcal{A}$ の接続 θ をひとつ固定すると，対称代数の universal property より，$\mathfrak{g}$-da 準同型 $\widetilde{c^\theta} : S(E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}) \to \mathcal{A}$ で可換図式

$$\begin{array}{ccc} E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{A} \\ \downarrow & & \uparrow \widetilde{c^\theta} \\ S(E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}) & = & S(E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}) \end{array}$$

をみたすものが存在する．これが誘導する $\mathfrak{g}$-da 準同型 $c^\theta : W\mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ を Chern-Weil 準同型とよぶ．

このとき (代数版)Chern-Weil の定理とは次のことをいう (例えば [5] を参照)：$\mathcal{A}$ を可換な locally free $\mathfrak{g}$-da とすると，$\mathcal{A}$ において 2 つの接続に関する Chern-Weil 準同型は $\mathfrak{g}$-homotopic である．つまり誘導される写像 $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \cong H((W\mathfrak{g})_{\mathrm{basic}}) \to H(\mathcal{A}_{\mathrm{basic}})$ は接続の取り方によらない．

$\mathcal{A}$ が非可換な場合は，テンソル代数 $T(E_{\mathfrak{g}^{\bullet}} \oplus \mathbb{F}c)$ に対する universal property により，g-da 準同型 $\widetilde{c^{\theta}} : T(E_{\mathfrak{g}^{\bullet}} \oplus \mathbb{F}c) \to \mathcal{A}$ で可換図式

$$\begin{array}{ccc} E_{\mathfrak{g}^{\bullet}} \oplus \mathbb{F}c & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{A} \\ \downarrow & & \uparrow \widetilde{c^{\theta}} \\ T(E_{\mathfrak{g}^{\bullet}} \oplus \mathbb{F}c) & = & T(E_{\mathfrak{g}^{\bullet}} \oplus \mathbb{F}c) \end{array}$$

をみたすものが存在する．しかし $S(E_{\mathfrak{g}^{\bullet}} \oplus \mathbb{F}c)$ についてはいえない．

そこで "対称化" とよばれる g-ds 準同型

$$\mathrm{sym} : S(E_{\mathfrak{g}^{\bullet}} \oplus \mathbb{F}c) \to T(E_{\mathfrak{g}^{\bullet}} \oplus \mathbb{F}c),\ v_1 \ldots v_k \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (-1)^{N_\sigma(v_1,\ldots,v_k)} v_{\sigma^{-1}(1)} \ldots v_{\sigma^{-1}(k)}$$

を考える．ここで $N_\sigma(v_1, \ldots, v_k)$ は v_i, $v_j \in E_{\mathfrak{g}^{\bullet}} \oplus \mathbb{F}c$ が odd element で，かつ $\sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)$ となる $i < j$ の組の数とする．

そして，2 つの合成

$$S(E_{\mathfrak{g}^{\bullet}} \oplus \mathbb{F}c) \xrightarrow{\mathrm{sym}} T(E_{\mathfrak{g}^{\bullet}} \oplus \mathbb{F}c) \xrightarrow{\widetilde{c^{\theta}}} \mathcal{A}$$

が誘導する写像を $c^{\theta} : W\mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ とする．ただし c^{θ} は g-ds 準同型であり，一般に代数の準同型にはならない．

しかし，非可換な代数に対する Chern-Weil の定理を含む次が成り立つ．

定理 3.1 ([2]). $\mathcal{A}$ を locally free g-da とする．任意の 2 つの g-ds 準同型 $c_0, c_1 : W\mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ が $W\mathfrak{g}$ の単位元で一致するならば，これらは g-homotopic である．

驚くべきことに c_i が代数の準同型でなくてもよいだけでなく，$\mathcal{A}$ の接続に関する Chern-Weil 準同型である必要もないのである．

証明. $W\mathfrak{g} \cong S(E_{\mathfrak{g}^{\bullet}})$ はスーパー Hopf 代数である．実際，diagonal embedding $E_{\mathfrak{g}^{\bullet}} \to E_{\mathfrak{g}^{\bullet}} \oplus E_{\mathfrak{g}^{\bullet}}$ から誘導される写像 $\Delta : S(E_{\mathfrak{g}^{\bullet}}) \to S(E_{\mathfrak{g}^{\bullet}}) \otimes S(E_{\mathfrak{g}^{\bullet}})$ を余積，自然な射影 $\pi : S(E_{\mathfrak{g}^{\bullet}}) \to E_{\mathfrak{g}^{\bullet}}^{\otimes 0} = \mathbb{F}$ を co-unit とすればよい．

$L(W\mathfrak{g}, \mathcal{A})$ に代数の構造を入れる．ϕ_1, $\phi_2 \in L(W\mathfrak{g}, \mathcal{A})$ に対して

$$\phi_1 \cdot \phi_2 : W\mathfrak{g} \xrightarrow{\Delta} W\mathfrak{g} \otimes W\mathfrak{g} \xrightarrow{\phi_1 \otimes \phi_2} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

と定める．ここで最後の写像は $\mathcal{A}$ における積である．また

$$i_{\mathcal{A}} \circ \pi : W\mathfrak{g} \to \mathcal{A}$$

が単位元となる．ただし $i_{\mathcal{A}} : \mathbb{F} \to \mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ の unit とする．

示すべきことは，g-ds 準同型 $c : W\mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ で $c(1) = 0$ ならば，g-homotopy ψ で $c = \mathrm{d}(\psi)$ をみたすものが存在することであるが，$\mathcal{A}$ の接続 θ をひとつ固定して，$\phi := c^{\theta} + c$ とおくとき

$$\psi := ((c \cdot \phi^{-1}) \circ h) \cdot \phi$$

とすればよい．ただし h は $S(E_{\mathfrak{g}^{\bullet}})$ の standard homotopy とする． □

注意 3.2. [2] における定理 3.1 の ψ は $\mathfrak{g}$-homotopy にはならない．上の ψ は橋本義武氏 (大阪市立大学) と筆者によるものである．

系 3.3. $\mathcal{A}$ を locally free $\mathfrak{g}$-da とする．$\mathfrak{g}$-ds 準同型 $c : W\mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ が $W\mathfrak{g}$ の unit を $\mathcal{A}$ の unit にうつすなら，誘導する写像 $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \cong H((W\mathfrak{g})_{\mathrm{basic}}) \to H(\mathcal{A}_{\mathrm{basic}})$ は代数の準同型であり，これは c の取り方によらない．

特にこれは接続 θ の Chern-Weil 準同型 c^θ に適用でき，非可換な代数に対して Chern-Weil の定理がいえる．

証明. $w' \in W\mathfrak{g}$ をひとつ固定すると，2 つの $\mathfrak{g}$-ds 準同型

$$W\mathfrak{g} \to \mathcal{A}, \quad w \mapsto c(ww'), \quad w \mapsto c(w)c(w')$$

は $W\mathfrak{g}$ の単位元で一致する．定理 3.1 よりこれらは $\mathfrak{g}$-homotopic である．よって

$$[c(ww')] = [c(w)c(w')] = [c(w)][c(w')]$$

となり，c が誘導する写像は代数の準同型であることがわかる． □

4 Duflo の定理

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が不変な内積をもつとき quadratic Lie 代数とよぶ．ただし内積とは非退化な対称双線型形式とする．

$\mathfrak{g}$ が quadratic Lie 代数で不変な内積 B をもつならば，$B_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ を

$$B_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\xi, \xi') = B_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\bar{\xi}, \bar{\xi}') := 0, \quad B_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\bar{\xi}, \xi') := B(\xi, \xi')$$

と定めると $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上の不変な内積となる．よって $\tilde{\mathfrak{g}}$ も quadratic になる．

このとき，

$$\omega(X, Y) := B_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\mathrm{d}X, Y)\mathfrak{c}, \quad X, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$$

と定めた $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上の cocycle ω に対する central extension $\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}$ を考える．ここで

$$[\xi, \xi']_{\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}} := B(\xi, \xi')\mathfrak{c}, \quad \xi, \xi' \in \mathfrak{g}$$

であることを注意しておく．

$U\mathfrak{g}$ を包絡代数，$\mathrm{Cl}(\mathfrak{g})$ を Clifford 代数とすると，Alekseev-Meinrenken により [1] で導入された非可換 Weil 代数 $\mathcal{W}\mathfrak{g} := U\mathfrak{g} \otimes \mathrm{Cl}(\mathfrak{g})$ に対して

$$\mathcal{W}\mathfrak{g} \cong U(\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}) / \langle \mathfrak{c} - 1 \rangle$$

が成り立つ ([2])．

$\tilde{\mathfrak{g}} = E_{\mathfrak{g}}$ と同一視することにより定まる微分，および

$$L_\xi v := [\bar{\xi}, v]_{\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}}, \ \iota_\xi v := [\xi, v]_{\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}}, \quad \xi \in \mathfrak{g}, v \in \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}$$

から自然に誘導される $\tilde{\mathfrak{g}}$ の表現により，$\mathcal{W}\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$-da と考える．

また

$$H((\mathcal{W}\mathfrak{g})_{\mathrm{basic}}) \cong (U\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$$

が成り立つことも注意しておく．

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とするとき，Poincaré-Birkhoff-Witt 対称化とよばれる線型写像

$$\mathrm{sym} : S\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}, \quad \xi_1 \ldots \xi_k \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \xi_{\sigma^{-1}(1)} \ldots \xi_{\sigma^{-1}(k)}$$

は同型になることが知られている．また $\mathfrak{g}$ がスーパー Lie 代数のときも同様のことが成り立つ (例えば [3] 参照)．しかしこれは一般に代数の準同型にはならない．

ここでは次を Duflo の定理とよぶことにする．

定理 4.1. $\mathfrak{g}$ を quadratic Lie 代数すると，$(S\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ と $(U\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ は代数として同型である．

従来の証明 ([4]) には無限階微分作用素などの解析を用いるが，以下の証明 ([2]) は代数的な議論のみで行うことができる．

証明. 不変な内積により $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$ と同一視し，$E_{\mathfrak{g}^*} \cong E_{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}$ と考える．

Poincaré-Birkhoff-Witt 対称化 $S(\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c) \to U(\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c)$ が誘導する $\mathfrak{g}$-ds としての同型 $W\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}\mathfrak{g}$ に対して，系 3.3 を適用すると，代数の同型 $(S\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}} \xrightarrow{\sim} (U\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ をえる． □

参考文献

[1] Alekseev, A., Meinrenken, E., *The non-commutative Weil algebra*, Invent. Math. 139 (2000), no.1, 135–172.

[2] Alekseev, A., Meinrenken, E., *Lie theory and the Chern-Weil homomorphism*, preprint, math.RT/0308135.

[3] Deligne, P., Morgan, J., *Notes on supersymmetry (following Joseph Bernstein)*, in "Quantum fields and strings: a course for mathematicians", Vol. 1, (Princeton, NJ, 1996/1997), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 41–97.

[4] Duflo, M., *Opéateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 10 (1977), no. 2, 265–288.

[5] Guillemin, V., Sternberg, S., *Supersymmetry and equivariant de Rham theory*, Springer-Verlag, 1999.